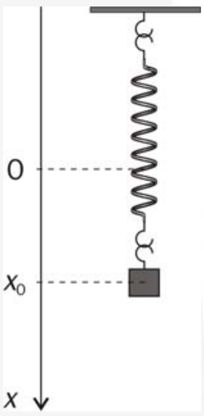
Analiza przemian energii mechanicznej w ruchu odważnika na sprężynie

Poniższy tekst jest przeznaczony dla nauczyciela, który, zgodnie z nową podstawą programową, ma obowiązek zrealizować hasło: „Uczeń analizuje przemiany energii w ruchu odważnika na sprężynie”.
Po zapoznaniu się z tym tekstem nauczyciel sam zdecyduje, które z elementów przeprowadzonego w nim rozumowania przedyskutuje z uczniami.
Najistotniejsze informacje, z którymi uczniowie powinni się zapoznać, to fakt, że:

- Siła ciężkości (stała podczas drgań) nie zakłóca ruchu harmonicznego ciężarka zawieszonego na sprężynie.
- Całkowita energia mechaniczna odważnika podczas drgań jest zachowana.

Obliczenie siły wypadkowej działającej na odważnik zawieszony na sprężynie:



Zero na osi x oznacza położenie końca nierozciągniętej sprężyny. W położeniu x_0: $mg = kx_0$.

Przypadek $A < x_0$

Dla $x < x_0$, $F_{wyp} = mg - F_s = kx_0 - kx = k(x_0 - x)$

Dla $x > x_0$, $F_{wyp} = F_s - mg = kx - kx_0 = k(x - x_0)$

Przypadek $A > x_0$

Dla $x < x_0$, $F_{wyp} = mg + F_s = kx_0 - kx = k(x_0 - x)$

Dla $x > x_0$, $F_{wyp} = F_s - mg = kx - kx_0 = k(x - x_0)$

Ogólnie

$$F_{wyp} = k\left|(x_0 - x)\right|$$

Siła wypadkowa jest w każdym przypadku zwrócona do położenia równowagi.

Wniosek 1: Siła ciężkości nie zakłóca drgań harmonicznych odważnika zawieszonego na sprężynie.

Dla $x = x_0$ zachodzi $F_c = F_s$:

$$mg = kx_0$$

Energia potencjalna

$$E_p = -mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

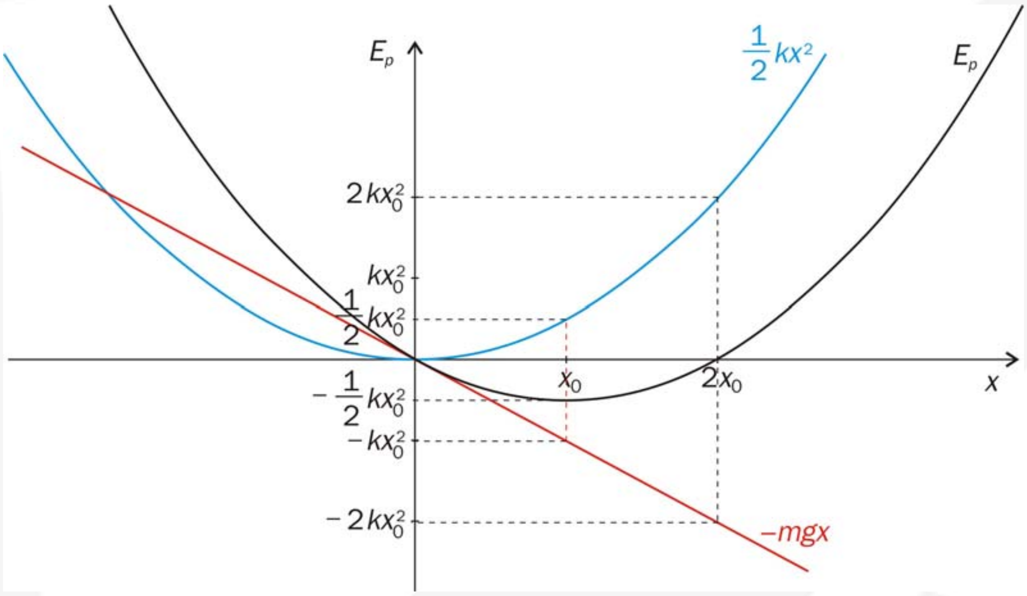
Szukamy położenia x_1, dla którego energia potencjalna jest równa zeru:

$$-mgx_1 + \frac{1}{2}kx_1^2 = 0$$

$$x_1(kx_1 - 2mg) = 0$$

Data utworzenia: 2010-03-12

$$x_1 = 0 \quad \text{lub} \quad x_1 = \frac{2mg}{k} = \frac{2kx_0}{k} = 2x_0$$



To, gdzie energia potencjalna jest równa zeru, zależy od wyboru poziomu zerowego.

Wniosek 2: Przy naszym wyborze nie jest to położenie równowagi x_0!

Przyjmujemy, że ciężarek porusza się ruchem harmonicznym.

$$x - x_0 = A\sin\omega t \qquad x = x_0 + A\sin\omega t \qquad \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t$$

Energia kinetyczna

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2\omega t = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t \qquad \left(\text{bo } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\right)$$

Energia potencjalna

$$E_p = -mg(x_0 + A\sin\omega t) + \frac{1}{2}k(x_0 + A\sin\omega t)^2 = \frac{1}{2}k(A^2\sin^2\omega t - x_0^2)$$

Energia całkowita

$$E_c = E_p + E_k = \frac{1}{2}k(A^2 - x_0^2) = \text{const}$$

Wniosek 3: Jest spełniona zasada zachowania energii.

Sprawdźmy, w jakich położeniach x_2 energia kinetyczna jest równa zeru.

$$E_k(x) = \frac{1}{2}kA^2(1-\sin^2\omega t) = \frac{1}{2}kA^2\left[1-\frac{(x-x_0)^2}{A^2}\right]$$

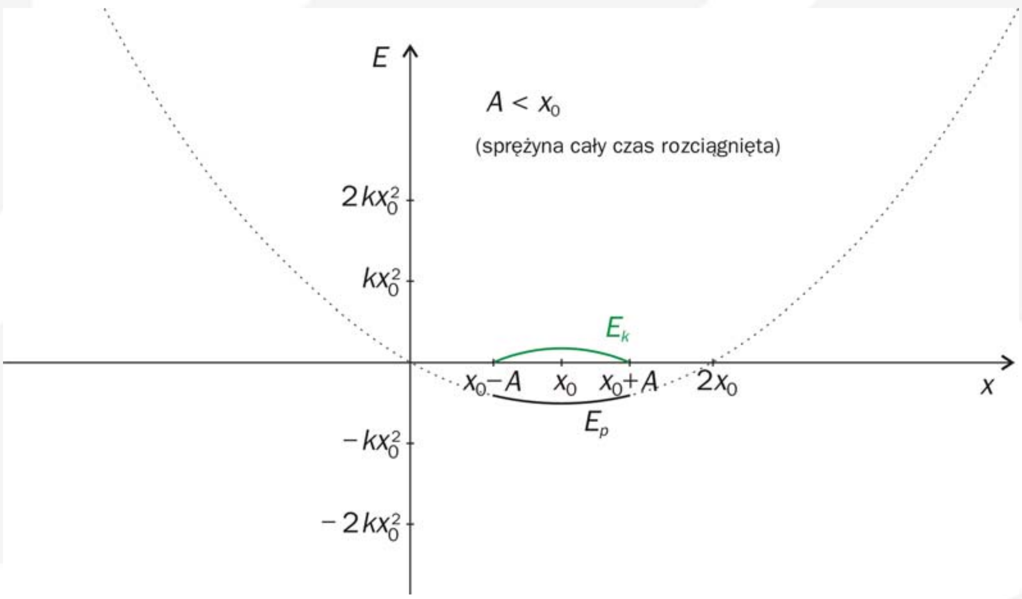
$$E_k(x_2) = \frac{1}{2}kA^2\left[1-\frac{(x_2-x_0)^2}{A^2}\right] = 0$$

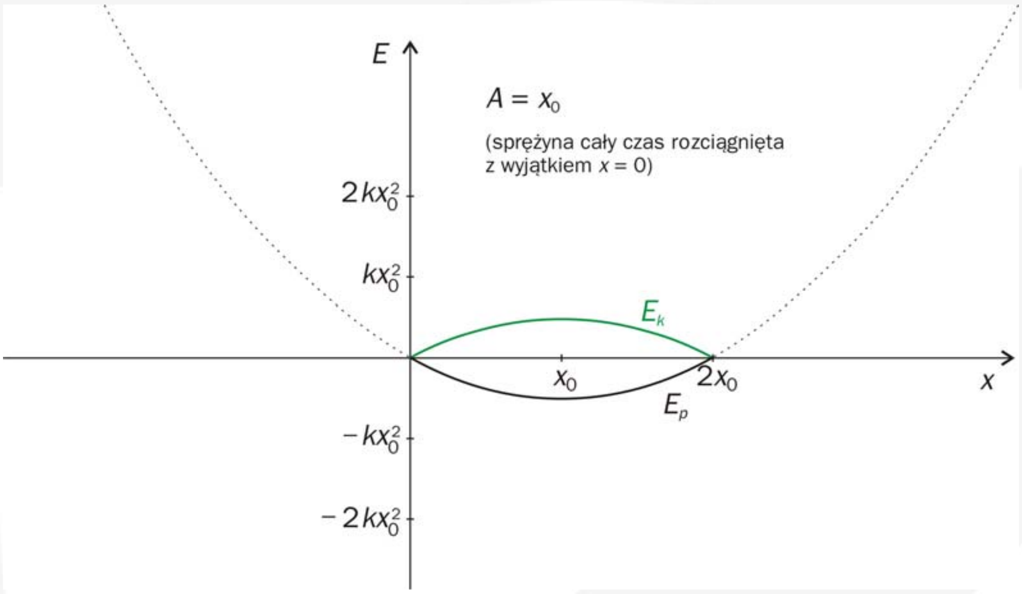
Dla $A \neq 0$

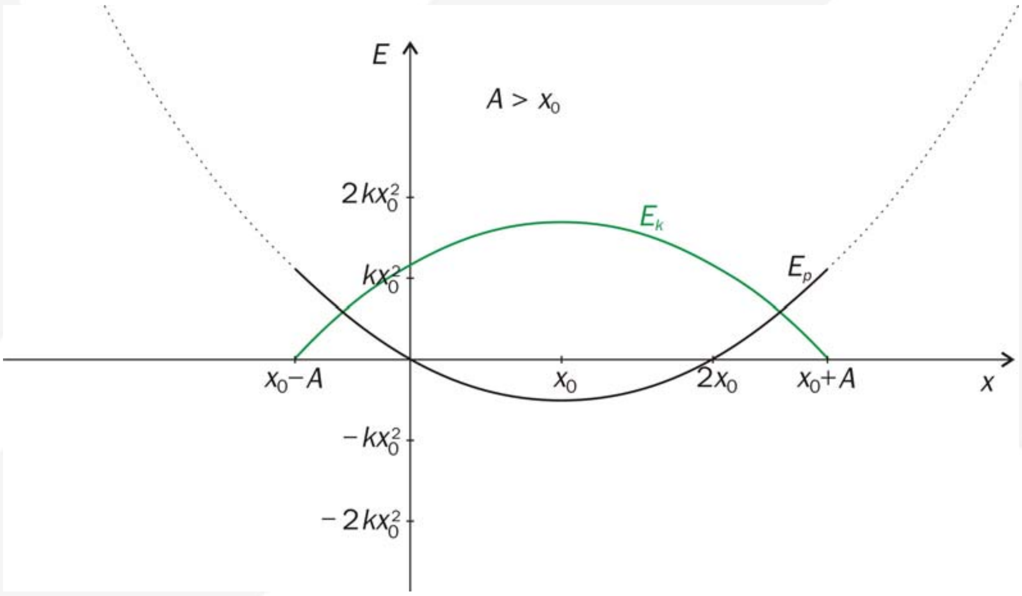
$$\frac{(x_2-x_0)^2}{A^2} = 1$$
$$(x_2-x_0)^2 = A^2$$
$$x_2 = x_0 \pm A$$

<u>Wniosek 4</u>: Uzyskujemy potwierdzenie, że ruch ciężarka jest ruchem harmonicznym.

Rozważmy trzy różne amplitudy drgań.




E
$A = x_0$
(sprężyna cały czas rozciągnięta
z wyjątkiem $x = 0$)
$2kx_0^2$
kx_0^2
E_k
x_0
$2x_0$
x
E_p
$-kx_0^2$
$-2kx_0^2$


E
$A > x_0$
$2kx_0^2$
E_k
kx_0^2
E_p
x_0-A
x_0
$2x_0$
x_0+A
x
$-kx_0^2$
$-2kx_0^2$