ZamKor P. Sagnowski i Wspólnicy spółka jawna
ul. Tetmajera 19, 31-352 Kraków
tel. +48 12 623 25 00, faks +48 12 623 25 24
e-mail: zamkor@zamkor.pl

Alternatywny wzór dla efektu Dopplera

Adam Kleiner

Efekt (czyli zjawisko) Dopplera[1] polega na tym, że jeśli źródło fali lub jej odbiornik poruszają się, to odbierana częstotliwość (np. wysokość dźwięku) jest zwykle różna od wysyłanej. Zakładam, że masz podstawowe informacje o falach (przynajmniej o dźwiękowych). Wiedza o zjawisku Dopplera nie jest konieczna do zrozumienia tego artykułu, choć na pewno pomocna.

Przy przypominaniu sobie klasycznego wzoru (podanego niżej jako (4)) do obliczania odbieranej częstotliwości łatwo może dojść do pomyłki w znaku lub zamiany licznika z mianownikiem. Proponuję więc następujące podejście, wymagające wprawdzie przekształcania przed zastosowaniem, ale za to dające postać łatwą do zapamiętania (prawie niemożliwą do pomylenia!). Aby ta postać wzoru się przydała, konieczna jest wprawa w obliczaniu szybkości względnej; żeby zrozumieć uzasadnienie tego wzoru potrzebne jest rozumienie ruchomych układów odniesienia.

Używamy słowa „szybkość” w znaczeniu „wartość wektora prędkości” (chwilowej). Zakładamy, że wszystkie rozważane szybkości są znacznie mniejsze od prędkości światła (rozdział o fali świetlnej będzie pod koniec tego artykułu; słuszniejsze byłoby mówienie o „szybkości światła”, bo chodzi tu o skalar, a nie o wektor, ale powszechniejsze jest używanie w tym kontekście wyrażenia „prędkość światła”). W praktyce mamy na myśli głównie fale dźwiękowe.

Załóżmy na razie, że źródło (**Z**) i odbiornik (**O**) poruszają się wzdłuż łączącej je prostej **ZO** (dopuszczamy przypadek, gdy jedno z nich się nie porusza).

Przypomnienie i usystematyzowanie pojęć[2]

Prędkość rozchodzenia się fali w przypadku ruchomego układu odniesienia zwykle jest zależna od kierunku rozchodzenia się. Nas interesuje rozchodzenie się fali od **Z** do **O** – w tym tekście wiele razy wystąpi określenie **interesująca część fali** właśnie w takim znaczeniu.

Częstotliwość fali to częstotliwość zmian „falującej” wielkości (np. ciśnienia powietrza, jeśli mówimy o fali dźwiękowej) w **nieruchomym** punkcie. Oczywiście znaczenie określenia „nieruchomy” zależy od układu odniesienia, zatem i częstotliwość od niego zależy.

Przypuśćmy, że mamy źródło drgań o ustalonej częstotliwości. Jeśli rozważamy układ odniesienia, w którym to źródło się nie porusza, to częstotliwość fali w tym układzie odniesienia jest równa częstotliwości drgań źródła. Jeśli w rozważanym układzie odniesienia źródło się porusza, to ma to wpływ na częstotliwość fali w tym układzie, a więc pośrednio także na długość fali.

Długość fali λ (czyli odległość sąsiednich grzbietów) jest niezależna od układu odniesienia (jak już powiedziano, rozważane prędkości są znacznie mniejsze od prędkości światła, więc nie uwzględniamy skrócenia Lorentza). **Powyższe stwierdzenie może być nieco mylące. Oto wyjaśnienie:** dla ustalonej fali jej długość jest niezależna od układu odniesienia. Natomiast przy ustalonym układzie odniesienia ruch źródła powoduje, że (drgając z tą samą częstotliwością) wytwarza ono inną falę, niż gdyby się nie

---

[1] Teksty szarą czcionką mają charakter uzupełniający. Jeśli masz mało cierpliwości, nie czytaj tych fragmentów, ale wróć do ostatnio pominiętych, jeśli czegoś nie rozumiesz.

[2] Ten rozdział jest istotny tylko dla takiego Czytelnika, który nie zrozumie czegoś w dalszej części.

poruszało. W szczególności fala wytworzona przez ruchome źródło ma inną długość i inną częstotliwość niż fala, którą wytworzyłoby tak samo drgające, ale nieruchome źródło.

Różnica bierze się z tego, że prędkość fali **względem źródła** jest inna, gdy źródło porusza się względem ośrodka, a inna, gdy się ono nie porusza. Więcej szczegółów znaleźć można w podręcznikach – celem tego artykułu nie jest tłumaczenie efektu Dopplera, lecz pokazanie innego podejścia obliczeniowego.

Wyprowadzenie wzoru

Rozważmy układ odniesienia związany ze źródłem. Oznaczmy przez ν_1 częstotliwość drgań źródła (mówiąc w uproszczeniu: częstotliwość dźwięku wytwarzaną przez źródło; „ν” to grecka litera „ni”), a przez v_1 **szybkość interesującej nas części fali względem źródła** (interesuje nas fala wzdłuż odcinka źródło–odbiornik). W układzie odniesienia źródła częstotliwość fali jest równa częstotliwości drgań źródła czyli ν_1. Długość fali (w interesującej nas części fali) wynosi:

$$\lambda = \frac{v_1}{\nu_1}$$

Zauważmy, że analogiczny wzór wiążący długość fali z jej szybkością i częstotliwością był omawiany w szkole[3]. Oba wzory mają identyczne uzasadnienie. W szkole wybiera się układ odniesienia związany z ośrodkiem, w którym rozchodzi się fala (najczęściej jest to powietrze). Nie jest jednak ważne, jaki wybierzemy układ odniesienia, tylko zgodne z tym wyborem rozumienie pojęć „szybkość fali” i „częstotliwość”[4].

Rozważmy teraz układ odniesienia związany z odbiornikiem. Oznaczmy przez ν_2 częstotliwość odbieraną przez odbiornik (np. słyszaną przez obserwatora), a przez v_2 **szybkość interesującej nas części fali względem odbiornika** (znów interesuje nas ruch fali wzdłuż odcinka źródło–odbiornik). Długość interesującej nas części fali wynosi:

$$\lambda = \frac{v_2}{\nu_2}$$

Tak jak poprzednio wynika to z tego samego rozumowania, które prowadzi się w szkole, żeby wykazać związek długości fali z jej szybkością i częstotliwością.

Mówiliśmy już, że przy przyjętych założeniach długość fali jest niezależna od wyboru układu odniesienia[5]. Lewe strony powyższych dwóch równań są więc jednakowe, co oznacza równość prawych stron:

$$\frac{v_1}{\nu_1} = \frac{v_2}{\nu_2} \tag{1}$$

To jest postać wzoru, której zapamiętanie zalecam: wyraziliśmy długość fali za pomocą jej szybkości względem źródła i częstotliwości źródła oraz przyrównaliśmy do tej samej długości wyrażonej

[3] Kto go nie zna, nie powinien czytać tego artykułu.
[4] Rozdział *Przypomnienie i usystematyzowanie pojęć*, wyżej.
[5] Rozdział *Przypomnienie i usystematyzowanie pojęć*, wyżej.

ZamKor P. Sagnowski i Wspólnicy spółka jawna
ul. Tetmajera 19, 31-352 Kraków
tel. +48 12 623 25 00, faks +48 12 623 25 24
e-mail: zamkor@zamkor.pl

z pomocą odbiornika. Już same jednostki zapobiegają pomyłce. Jeśli jednak odwrócą ci się w pamięci te ułamki (byle oba razem), to nie szkodzi, a nawet lepiej, bo otrzymasz równoważny wzór, **dogodniejszy do następnych rozważań**:

$$\frac{\nu_1}{v_1} = \frac{\nu_2}{v_2} \tag{2}$$

Wystarczy zapamiętać wzór (2) zamiast (1). Tu również jednostki zapobiegają pomyłce, tyle tylko, że wspólna wartość obu stron tego wzoru jest równa **odwrotności** długości fali, a więc nie ma tak prostej interpretacji fizycznej jak w przypadku wzoru (1).

Przykład, ale nie tylko

Wzory (1) lub (2) są nie tylko sposobem zapamiętania wzoru klasycznego (o czym będzie mowa w następnym rozdziale). Można je też stosować bezpośrednio w zadaniach zamkniętych (ogólniej: takich, gdzie nie otrzymuje się punktów za zacytowanie oczekiwanego przez komisję wzoru i gdy nie ma potrzeby dojścia do końcowego wzoru symbolicznego).

Przykład. Pociąg jedzie z szybkością 30 m/s. Lokomotywa wydaje dźwięk o częstotliwości 620 Hz. Przed pociągiem leci ptak z szybkością 15 m/s w tę samą stronę, w którą jedzie pociąg. Jaką częstotliwość dźwięku lokomotywy słyszy ptak? Przyjmij, że szybkość dźwięku w powietrzu wynosi 340 m/s.

Pierwszym, ale niekoniecznym krokiem może być przejście do wzoru (3), który podamy w następnym rozdziale. Pomińmy jednak ten krok.

Obliczamy, że szybkość fali względem źródła (czyli pociągu) to $v_1 = (340 - 30)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 310\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a szybkość fali względem odbiornika (ptaka) to $v_2 = (340 - 15)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 325\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Podstawiamy te wartości (oraz częstotliwość 620 Hz) do wzoru (2):

$$\frac{620\ \mathrm{Hz}}{310\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{\nu_2}{325\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$\nu_2 = \frac{620\ \mathrm{Hz} \cdot 325\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{310\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 2 \cdot 325\ \mathrm{Hz} = 650\ \mathrm{Hz}$$

Przejście do typowych oznaczeń i wzoru klasycznego

Przeanalizujmy jeszcze te wzory z punktu widzenia oznaczeń powszechnie występujących w zadaniach dotyczących zjawiska Dopplera. W ten sposób dojdziemy do postaci klasycznej (lub prawie klasycznej) wzoru, takiej, jaka jest oczekiwana na egzaminach. Czy zatem warto zapamiętywać wzory

(1) lub (2)? Chyba warto, bo są one łatwiejsze, a ponadto, jak pokazałem wyżej, przy obliczeniach na wartościach są bardzo wygodne. Jeśli nawet na egzaminie trzeba dojść do symbolicznego wzoru końcowego (jak wzór (4) poniżej), to łatwo będzie powtórzyć poniższe rozumowanie (o ile masz wprawę w przekształcaniu wzorów).

Można też pamiętać wzór (4), ale nie „mechanicznie”, bo wtedy nietrudno o pomyłkę np. w wyborze znaków. Natomiast, mając świadomość, że licznik i mianownik ułamka w tym wzorze wywodzą się z szybkości względnych v_2 i v_1, łatwo (na etapie podstawiania wartości) wykryjesz swój ewentualny błąd.

Zacznijmy od przekształcenia wzoru (2):

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{v_2}{v_1} \tag{3}$$

W celu wprowadzenia klasycznych oznaczeń ustalmy dowolny układ odniesienia. Najnaturalniejsza możliwość to układ, w którym ośrodek rozchodzenia się fali jest nieruchomy, ale można też wybrać dowolny inny układ odniesienia. Wcześniejsze rozważania były niezależne od tego, czy w wybranym układzie odniesienia ośrodek się porusza czy nie.

Niech szybkość fali (w tym układzie odniesienia) będzie równa v_f, szybkość źródła v_z, a szybkość odbiornika v_o (przy czym jedna z tych szybkości może być zerem, jeśli odpowiedni obiekt się nie porusza).

Zatem:

$$v_1 = v_f \pm v_z$$

przy czym:

- znak „–” stosujemy, gdy źródło porusza się w tę samą stronę co fala,
- znak „+”, gdy porusza się w stronę przeciwną.

Jest to zwyczajne obliczenie szybkości względnej fali względem źródła.

Analogicznie:

$$v_2 = v_f \pm v_o$$

przy czym znowu:

- znak „–” stosujemy, gdy odbiornik porusza się w tę samą stronę co fala,
- znak „+”, gdy porusza się w stronę przeciwną.

Gdyby zamiast *wartości* każdej prędkości brać jej *współrzędną* na osi **ZO** zwróconej od źródła do odbiornika, to w obu powyższych wzorach zamiast „±”, byłby „–”, przynajmniej dopóki szybkość obiektu jest mniejsza od szybkości fali. Wynika to z reguł wektorowego obliczania prędkości względnej.

Podstawmy te wyrażenia do wzoru (3):

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{v_f \pm v_o}{v_f \pm v_z} \tag{4}$$

Jest to klasyczna postać wzoru na częstotliwość odbieraną w zjawisku Dopplera. Znak „±” poprzedzający szybkość należy rozumieć:

- jako „–”, jeśli obiekt, o którego szybkość chodzi, porusza się zgodnie z interesującą częścią fali,
- jako „+”, gdy ten obiekt porusza się w przeciwną stronę.

ZamKor P. Sagnowski i Wspólnicy spółka jawna
ul. Tetmajera 19, 31-352 Kraków
tel. +48 12 623 25 00, faks +48 12 623 25 24
e-mail: zamkor@zamkor.pl

Proponuję w zadaniach otwartych zacząć w brudnopisie od wzoru (1) lub (2) i – wiedząc w konkretnej sytuacji, czy do obliczenia jednej lub drugiej szybkości względnej trzeba użyć plusa czy minusa – dojść do odpowiednika wzoru (4), w którym nie będzie podwójnych znaków. Wpisz ten wzór do czystopisu, poprzedzając go stwierdzeniem: „Do rozważanej sytuacji stosuje się następująca postać wzoru...”. Jestem pewny, że żaden egzaminator tego nie zakwestionuje (w końcu wolno by ci było pamiętać cztery wersje wzoru i powołać się na właściwą).

Popularna postać i jej nieprawidłowe objaśnienie[6]

W tym rozdziale omówimy wariant zapisowy wzoru (4), którego osobiście nie polecam, ale nie mam pewności, czy na studiach ktoś nie będzie wymagał takiej postaci[7].

Jest to postać wzoru (4) zaproponowana w renomowanym podręczniku Resnicka i Hallidaya i, co ważne, poprawnie w nim objaśniona:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{v_f \pm v_o}{v_f \mp v_z}$$

Niektórzy dodają zwięzłe, ale **mylące** objaśnienie (do 4 lutego 2011 r. było ono też w *Wikipedii*): „Znaki górne stosujemy, gdy źródło i odbiornik zbliżają się do siebie, zaś dolne, gdy się oddalają”. Jednak przypuśćmy, że obiekty te poruszają się w tę samą stronę. Nadal pojęcia „zbliżają się” lub „oddalają się” mają sens, ale zastosowanie ich w tym podsumowaniu prowadzi do błędu. W rozdziale *Przykład, ale nie tylko* (wyżej) przy zastosowaniu znaków górnych wyszedłby fałszywy wynik 710 Hz; prawidłowy wynik otrzymuje się, stosując w liczniku i w mianowniku znaki minus (a dwa plusy należałoby zastosować, gdyby oba obiekty poruszały się przeciwnie do ruchu fali).

Oto **nieprawidłowe obliczenie**:

Pociąg dogania ptaka, więc ptak i pociąg zbliżają się do siebie. Opierając się na podanej (**błędnej**) regule, stosujemy znaki górne:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{v_f + v_o}{v_f - v_z}$$

błąd!

Podstawiając, otrzymujemy:

$$\nu_2 = 620 \cdot \frac{340 + 15}{340 - 30}\,\mathrm{Hz} = 710\,\mathrm{Hz}$$

błąd!

Oto poprawne objaśnienie (równoważne podanemu po wzorze (4)):

- $\pm v_o$ rozumiemy jako $+v_o$, gdy odbiornik porusza się ku źródłu, a jako $-v_o$, gdy porusza się w przeciwną stronę;
- $\mp v_z$ rozumiemy jako $-v_z$, gdy źródło porusza się ku odbiornikowi, a jako $+v_z$, gdy porusza się w przeciwną stronę.

[6] Rozdział nieobowiązkowy.

[7] Nie będzie ona chyba wymagana na maturze, bo w *Podstawie programowej* (przynajmniej tej z 2010 roku) wymaga się tylko przypadku z nieruchomym obserwatorem.

ZamKor P. Sagnowski i Wspólnicy spółka jawna
ul. Tetmajera 19, 31-352 Kraków
tel. +48 12 623 25 00, faks +48 12 623 25 24
e-mail: zamkor@zamkor.pl

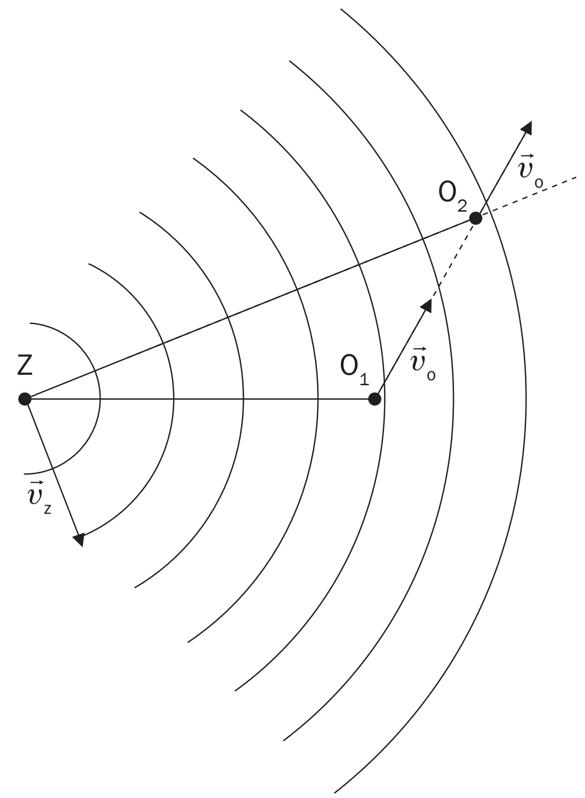
Przypadek ukośny (ten rozdział stanowi też ujednolicenie znaków we wzorze (4))[8]

Do tej pory zakładaliśmy, że źródło i odbiornik poruszają się wzdłuż łączącej je prostej **ZO**. Jeśli jeden lub oba z tych obiektów poruszają się ukośnie, to problem się komplikuje.

Pierwsza subtelność: wprawdzie przy ruchu ukośnym też ma sens pojęcie szybkości względnej, jednak jej użycie w dotąd podanych wzorach dałoby błędne rezultaty. Ruch w kierunku prostopadłym do **ZO** „nie liczy się” dla częstotliwości, ale wpływa na szybkość względną. Trochę inaczej jest dla światła (tzw. poprzeczny efekt Dopplera).

Dwie następne subtelności zwykle się pomija.

Druga subtelność: poprawne obliczenie wymagałoby rozważenia położenia punktu **Z** w chwili wysłania fali (umownie: grzbietu) i położenia punktu **O** w chwili **odebrania** tego samego grzbietu. Jeśli punkt **O** porusza się ukośnie, opóźnienie to wpływa na kierunek prostej **ZO**. Na rysunku 1 przez $\mathbf{O_1}$ oznaczono położenie odbiornika w chwili wysłania pewnego grzbietu, a przez $\mathbf{O_2}$ jego położenie w chwili odebrania tego grzbietu (przy ścisłych rozważaniach należałoby więc przez prostą **ZO** rozumieć prostą $\mathbf{ZO_2}$). Na wielkość odchylenia kierunku tej prostej wpływa proporcja prędkości fali do składowej prędkości odbiornika w kierunku prostopadłym do prostej **ZO**; proporcja ta jest zwykle duża, dlatego najczęściej zmiana kierunku prostej **ZO** jest mała. W praktyce więc akceptuje się obliczenie bez opóźnienia „odczytywania” pozycji punktu **O**.



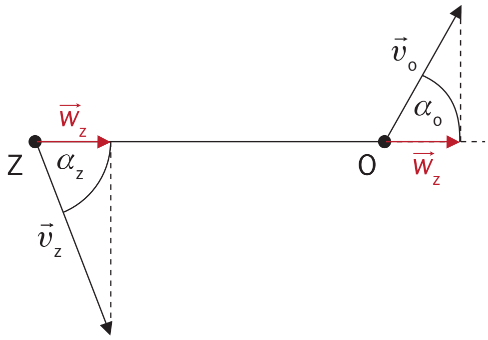
Rys. 1

[8] Ten i dalsze rozdziały tego artykułu nie wnoszą istotnie nowych treści ponad to, co jest dostępne np. w *Wikipedii*; napisałem je, by zebrać razem najważniejsze informacje.

Trzecia subtelność: zakładamy, że zmiana kierunku prostej **ZO** (w wyniku ruchu odbiornika **i źródła**) w czasie jednego okresu drgań jest tak mała, że może być pominięta. Bez tego założenia obliczenia bardzo by się skomplikowały. To założenie jest prawie zawsze spełnione jeszcze lepiej niż poprzednie.

Aby obliczyć wpływ ruchu obiektu (źródła lub odbiornika) na odbieraną częstotliwość, należy wszystkie wchodzące w grę wektory zastąpić ich rzutami na prostą **ZO**. Tak otrzymane wielkości podstawiamy do wzoru (4).

Uzasadnienie: na częstotliwość odbieraną ma wpływ nie tyle sam ruch obiektu, co wpływ tego ruchu na zmianę odległości między obiektami (źródłem i odbiornikiem).



Rys. 2

Mówiąc mniej ogólnikowo: każdą z prędkości $\vec{v}_z$ i $\vec{v}_o$ należy rozłożyć na składowe – równoległą i prostopadłą do prostej **ZO**. Składowe prostopadłe pomijamy, a do wzoru (4) w miejsce $\vec{v}_z$ i $\vec{v}_o$ wprowadzamy składowe równoległe $\vec{w}_z$ i $\vec{w}_o$, które zaznaczono na rysunku 2 na czerwono; mają one wartości $|v_z \cos\alpha_z|$ i $|v_o \cos\alpha_o|$.

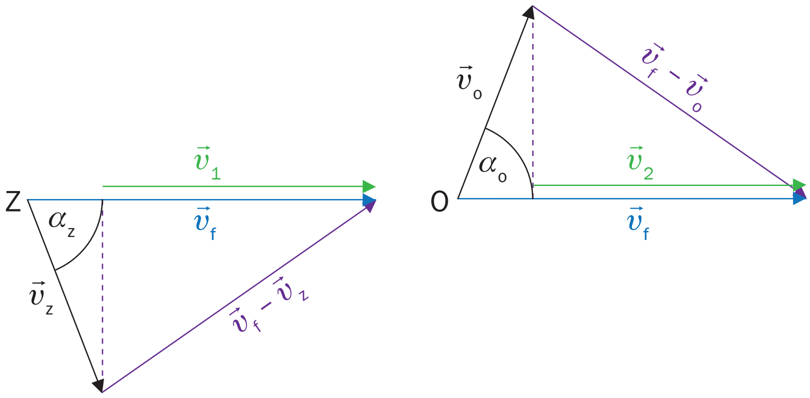
Powyższe rozważania prowadzą do następującego wzoru, który nadaje się także do przypadku ruchu wzdłuż prostej **ZO** i ujednolica kwestię znaków „+” i „–”:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{v_f - v_o \cos\alpha_o}{v_f - v_z \cos\alpha_z} \tag{5}$$

Kąty α_o i α_z są kątami między stosownym wektorem prędkości i wektorem $\overrightarrow{ZO}$ (lub równoważnie: wektorem $\vec{v}_f$ prędkości interesującej części fali)[9]. Oczywiście aby określić kąt między wektorami, należy je przesunąć równolegle tak, by miały wspólny początek (ewentualnie wspólny koniec; błędem byłoby jednak odczytywać ten kąt, gdy początek jednego wektora jest w końcu drugiego wektora).

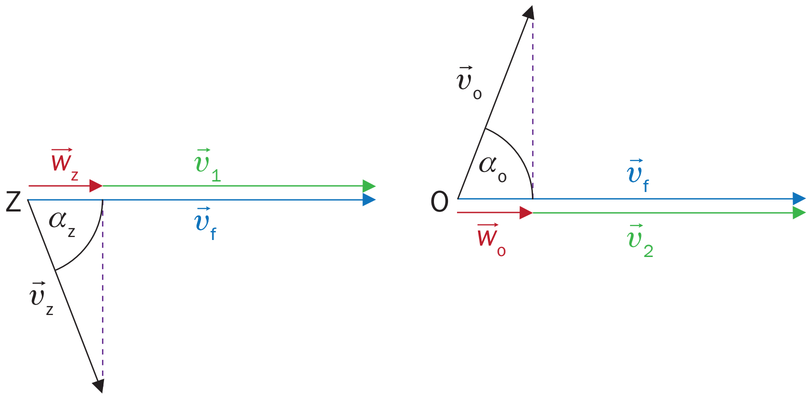
Jeśli stosujemy wzór (1) lub (2), można oczywiście mówić, że należy rozłożyć na takie składowe prędkość interesującej części fali względem obiektu (w kolorze fioletowym na rys. 3 poniżej), po czym składową równoległą wprowadzić do obliczeń jako v_1 lub v_2.

[9] W *Wikipedii*, gdzie nieco inaczej definiuje się rozważane kąty, w liczniku jest „+”; ja zdecydowałem się na takie określenie kątów, by być bardziej w zgodzie z koncepcją obliczania szybkości względnej.



Rys. 3

W praktyce i tak obliczamy te prędkości względne na podstawie prędkości fali i prędkości obiektu. Prościej jest więc rozłożyć prędkość obiektu na składowe. Składową równoległą do prostej **ZO** (na rys. 2 i 4 wektory czerwone: $\vec{w}_z$ i $\vec{w}_o$) odejmujemy (wektorowo) od $\vec{v}_f$ i w ten sposób otrzymujemy wektor (zielony na rys. 4), którego wartość należy przyjąć za v_1 lub v_2 we wzorze (1) lub (2).



Rys. 4

Gdyby zmiana kierunku prostej **ZO** w czasie jednego okresu drgań nie była pomijalna, nie wolno by było przyjąć, że zmianę odległości źródła **Z** i odbiornika **O₂** w czasie jednego okresu fali można obliczyć na podstawie iloczynów tych składowych przez ten czas. O zmianie częstotliwości odbieranej względem nadawanej decyduje właśnie ta zmiana odległości (w tym zdaniu jest pewne uproszczenie – niesłuszne, gdy szybkości źródła lub odbiornika nie są małe w porównaniu z szybkością fali).

Przypadek naddźwiękowy[10]

Jeśli źródło lub odbiornik poruszają się szybciej niż fala, ale ze zwrotem przeciwnym do zwrotu prędkości fali, nie powoduje to konieczności żadnej zmiany we wzorach.

Rozważmy przypadek, że źródło porusza się w stronę odbiornika szybciej niż fala. Wtedy oczywiście źródło minie odbiornik, zanim dotrą do niego wysłane wcześniej fale. Kiedyś jednak one do niego dotrą i możemy pytać o obserwowaną częstotliwość tych fal.

[10] Rozdział nieobowiązkowy.

ZamKor P. Sagnowski i Wspólnicy spółka jawna
ul. Tetmajera 19, 31-352 Kraków
tel. +48 12 623 25 00, faks +48 12 623 25 24
e-mail: zamkor@zamkor.pl

Może też się zdarzyć, że odbiornik oddala się od źródła z szybkością większą od szybkości fali i wskutek tego wyprzedza on falę wysłaną wcześniej przez źródło. Wtedy będzie rejestrował oznaki fal, wysłanych zanim minął on źródło (albo zanim jego szybkość przekroczyła szybkość fali).

Jeśli jeden z obiektów (lub obydwa) wyprzedza falę, to wzory (1) i (2) pozostają aktualne, ale zmienia się nieco sposób obliczania szybkości względnej. Mianowicie: z wyrażeń podanych między wzorami (3) i (4) otrzymujemy wielkość ujemną. Aby opanować ten przypadek, zastępujemy ją przez jej wartość bezwzględną[11]. Podobnie we wzorach (4) i (5) licznik i/lub mianownik stają się ujemne – trzeba zastąpić ułamek przez jego wartość bezwzględną.

Przypadek fali świetlnej – wzory przybliżone

Najważniejszy wniosek z tego i następnego rozdziału: dla światła (ogólniej: fali elektromagnetycznej) wzory (4) i (5) można stosować, ale dają one wynik niedokładny (tym gorszy, im szybciej poruszają się względem wybranego układu odniesienia źródło i odbiornik), a wzory (1), (2) i (3) nie są poprawne (ale nadal mogą służyć do przypomnienia sobie wzoru (4)).

Reszta informacji podanych w tych dwóch rozdziałach (zwłaszcza wzory) nie musi być zapamiętana.

Czytelnikowi bardziej ambitnemu proponuję wzór (8a) (jest to wzór dokładny, równoważny trudniejszym do zapamiętania wzorom (6) i (8b), choć za to wzór (6) jest w moim przekonaniu wygodniejszy w stosowaniu).

Jeśli mamy do czynienia z falą elektromagnetyczną (np. świetlną), nie jest spełniony postulat, że wszystkie rozważane szybkości są dużo mniejsze od prędkości światła. Oparcie się na nim jest kluczowe przy udowadnianiu wzorów (1), (2) i (3); w szczególności w przypadku fal elektromagnetycznych zbyt niedokładne jest założenie, że długość fali jest taka sama w każdym układzie odniesienia (a to założenie było podstawą wzoru (1), a więc też (2) i (3)).

Jeśli jednak szybkości **odbiornika** i **źródła** są małe w porównaniu z prędkością światła, to wzory klasyczne (4) i (5) dadzą nam wynik z zadowalającą dokładnością. Co więcej, prędkość światła jest taka sama względem każdego układu odniesienia. Dlatego za układ odniesienia można przyjąć źródło – wtedy wzór (4) przybiera postać:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{c - v}{c} \tag{4a}$$

gdzie v jest szybkością **oddalania** się odbiornika od źródła. Skupiamy się na oddalaniu się, bo jest to przypadek występujący na co dzień w astronomii. W sytuacji zbliżania się (względnego) odbiornika do źródła w miejsce v należy podstawić $-v$. Dla uproszczenia zakładamy, że prędkość względna źródła względem odbiornika jest równoległa do prostej **ZO** (przypadek ukośny jest omówiony w *Wikipedii*: *http://pl.wikipedia.org/wiki/Efekt_Dopplera*).

[11] Oczywiście mogłem to zrobić już wyżej i mieć jednolity wzór, ale na tamtym etapie byłby on nienaturalny.

ZamKor P. Sagnowski i Wspólnicy spółka jawna
ul. Tetmajera 19, 31-352 Kraków
tel. +48 12 623 25 00, faks +48 12 623 25 24
e-mail: zamkor@zamkor.pl

Równie dobrze za układ odniesienia można przyjąć odbiornik. Prędkość źródła względem odbiornika jest wektorem przeciwnym do wektora prędkości odbiornika względem źródła, a więc wartość jednego i drugiego wektora jest taka sama: v (nadal stosujemy konwencję, że dla zbliżania się wpisujemy ($-v$) zamiast v). Wzór (4) przybiera więc postać:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{c}{c+v} \tag{4b}$$

Jak łatwo zauważyć, wzory (4a) i (4b) są sprzeczne. Sprzeczność ta bierze się z niedokładności (cechującej prawie całą mechanikę klasyczną: dokładne obliczenia dla obiektów będących w ruchu powinny uwzględniać zjawiska teorii względności). Jednak dopóki ciała poruszają się znacznie wolniej niż światło, niedokładności związane z nieuwzględnianiem tych zjawisk są tak małe, że można je pominąć (podobno nawet loty kosmiczne projektuje się bez uwzględniania tych zjawisk i nie prowadzi to do kłopotów). Tak więc wzory (4a) i (4b) można akceptować (wynik wzoru (4a) jest odrobinę za mały, a wynik wzoru (4b) jest odrobinę za duży).

Do celów szkolnych zalecam wzory (4a) lub (4b). Można jednak poprawić dokładność obliczania ν_2, stosując wzór:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{c - \frac{v}{2}}{c + \frac{v}{2}} \tag{4c}$$

Na gruncie mechaniki klasycznej (!) odpowiadałoby to wybraniu układu odniesienia poruszającego się z prędkością będącą średnią arytmetyczną z wektorów prędkości źródła i odbiornika. Stosowanie tego wzoru w szkole może się jednak spotkać z krytyką.

Przypadek fali świetlnej – wzór dokładny

Choć może to być zaskakujące, średnia geometryczna z wartości uzyskanych ze wzorów (4a) i (4b) jest wartością ν_2 **dokładną nawet przy** v **dowolnie bliskim** *c*. Średnia ta wyraża się wzorem:

$$\nu_2 = \nu_1 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tag{6}$$

a stąd, jak wykażę w *Dodatku*:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{\frac{c-v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{7a}$$

ZamKor P. Sagnowski i Wspólnicy spółka jawna
ul. Tetmajera 19, 31-352 Kraków
tel. +48 12 623 25 00, faks +48 12 623 25 24
e-mail: zamkor@zamkor.pl

a zarazem:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{c}{c+v}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{7b}$$

Odwrotność pierwiastka występującego w powyższych wzorach pojawia się bardzo często w teorii względności, dlatego wprowadzono dla tej wielkości umowny symbol gamma (zwany też czynnikiem Lorentza):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Kiedy go użyjemy, wzory (7a) i (7b) przybiorą postać:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{c-v}{c}\gamma \tag{8a}$$

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{\frac{c}{c+v}}{\gamma} \tag{8b}$$

Czynnik γ często mamy już obliczony i wtedy wzór (8a) lub (8b) jest wygodniejszy niż (6).

Gdy źródło i odbiornik zbliżają się do siebie, to we wzorach (6), (7a) i (7b) podstawiamy $-v$ zamiast v.

Jeśli v jest dużo mniejsze od c, to γ jest prawie równe 1. W mechanice klasycznej bardzo często mamy do czynienia z wzorami, które wynikają ze wzorów teorii względności przy zastąpieniu γ przez 1. Wtedy wzór (8a) staje się wzorem (4a), zaś wzór (8b) – wzorem (4b). Jak pewnie pamiętasz, klasyczny wzór (4) przybiera dla nieruchomego odbiornika postać (4a), a dla nieruchomego źródła – (4b).

Dodatek[12]

Na koniec przedstawimy przejście od wzoru (6) do (7a) i (7b). W (6) dzielimy licznik i mianownik ułamka pod pierwiastkiem przez c:

$$\nu_2 = \nu_1\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \nu_1\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \tag{9}$$

[12] Tylko dla zainteresowanych.

ZamKor P. Sagnowski i Wspólnicy spółka jawna
ul. Tetmajera 19, 31-352 Kraków
tel. +48 12 623 25 00, faks +48 12 623 25 24
e-mail: zamkor@zamkor.pl

Licznik i mianownik ułamka po prawej stronie wzoru (9) mnożymy przez $1 - \frac{v}{c}$. W mianowniku korzystamy ze wzoru $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)}} = \nu_1 \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \nu_1 \frac{\frac{c - v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{7a}$$

Wykorzystaliśmy powszechnie znany fakt, że $v < c$; gdyby było $v > c$, licznik w trzeciej i czwartej części wzoru byłby ujemny, zaś licznik w części drugiej byłby dodatni. (Osobna kwestia, że mianowniki tych trzech części straciłyby sens.)

Aby uzyskać wzór (7b), po prawej stronie wzoru (9) mnożymy licznik i mianownik ułamka przez $1 + \frac{v}{c}$. Tym razem w liczniku korzystamy z tego samego wzoru skróconego mnożenia:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right)}}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2}} = \nu_1 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v}{c}} = \nu_1 \frac{1}{\frac{c + v}{c}} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \nu_1 \frac{c}{c + v} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{7b}$$

Źródła

Multimedialny kurs maturalny z fizyki dostępny na *http://platforma.edu.pl/blog/*

http://pl.wikipedia.org/wiki/Efekt_Dopplera

http://pl.wikipedia.org/wiki/Relatywistyczny_efekt_Dopplera (Uwaga: nie pomyl tam długości fali z częstotliwością.)