Zadanie 2 z LX Olimpiady Fizycznej
Zawody III stopnia

Jednorodna rura o momencie bezwładności I względem jej osi, długości L i promieniu wewnętrznym r_2 i zewnętrznym r_1 (przy czym $L \gg r_1$) znajduje się w jednorodnym, równoległym do jej osi polu magnetycznym o indukcji B_0. Rura jest wykonana z nieprzewodzącego, niemagnetycznego materiału. Jej powierzchnia zewnętrzna jest równomiernie naładowana ładunkiem o całkowitej wartości Q, a powierzchnia wewnętrzna jest równomiernie naładowana ładunkiem o całkowitej wartości $-Q$. Rura może się swobodnie obracać wokół swojej osi, ale początkowo jest nieruchoma. Znajdź końcową prędkość kątową rury, jeśli wartość indukcji zewnętrznego pola magnetycznego zmniejszono powoli od B_0 do zera.

Podaj wynik liczbowy dla L = 0,5 m, r_1 = 0,010 m, r_2 = 0,009 m, B_0 = 1 T, $Q = 6 \cdot 10^{-5}$ C, $I = 6 \cdot 10^{-9}$ kg·m². Przenikalność magnetyczna próżni $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Rozwiązanie Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej

Z prawa Ampere'a wynika, że gdy indukcja pola magnetycznego wynosi B_{zew} a rura obraca się z prędkością kątową ω, przy czym kierunek i zwrot $\vec{B}_{zew}$ oraz $\vec{\omega}$ są takie same, to indukcja pola magnetycznego w odległości r od osi jest równa:

$$B = \begin{cases} B_{zew} & \text{dla} \quad r \ge r_1 \\ B_{zew} + \dfrac{\mu_0 \omega Q}{2\pi L} & \text{dla} \quad r_1 > r \ge r_2 \\ B_{zew} & \text{dla} \quad r < r_2 \end{cases}$$

Jeśli pole magnetyczne ulega zmianie, to, zgodnie z prawem Faradaya, indukuje się pole elektryczne. Na zewnętrznej powierzchni rury będzie ono wynosić:

$$E_1 = -\frac{1}{2\pi r_1}\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{1}{2\pi r_1}\left[\pi(r_1^2 - r_2^2)\left(\frac{dB_{zew}}{dt} + \frac{\mu_0 Q}{2\pi L}\frac{d\omega}{dt}\right) + \pi r_2^2 \frac{dB_{zew}}{dt}\right]$$

natomiast na wewnętrznej będzie równe:

$$E_2 = -\frac{1}{2\pi r_2}\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{1}{2\pi r_2}\left[\pi r_2^2 \frac{dB_{zew}}{dt}\right]$$

Pole elektryczne stara się obrócić naszą rurę. Moment siły wynosi:

$$M = QE_1 r_1 - QE_2 r_2$$

Po podstawieniu wzorów na E_1 i E_2 otrzymamy równanie ruchu obrotowego rury:

$$I\frac{d\omega}{dt}=-\frac{Q}{2\pi}\left[\pi(r_1^2-r_2^2)\left(\frac{dB_{zew}}{dt}+\frac{\mu_0 Q}{2\pi L}\frac{d\omega}{dt}\right)+\pi r_2^2\frac{dB_{zew}}{dt}\right]+\frac{Q}{2\pi}\left[\pi r_2^2\frac{dB_{zew}}{dt}\right]=-\frac{Q}{2\pi}\left[\pi(r_1^2-r_2^2)\left(\frac{dB_{zew}}{dt}+\frac{\mu_0 Q}{2\pi L}\frac{d\omega}{dt}\right)\right]$$

Przekształcając powyższy wzór, otrzymamy:

$$\left[I+\frac{Q}{2\pi}\pi(r_1^2-r_2^2)\frac{\mu_0 Q}{2\pi L}\right]\frac{d\omega}{dt}=-\frac{Q}{2\pi}\pi(r_1^2-r_2^2)\frac{dB_{zew}}{dt}$$

Skąd końcowa prędkość kątowa wynosi:

$$\omega_{konc}=\frac{\frac{Q}{2}(r_1^2-r_2^2)B_0}{I+(r_1^2-r_2^2)\frac{\mu_0 Q^2}{4\pi L}}=0{,}095\frac{1}{s}$$

Znak + powyżej oznacza, że jeśli patrzymy zgodnie z $\vec{B}_0$, to rura zacznie się obracać zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Rozwiązanie przedstawione przez dr Jadwigę Salach

1. W pierwszej części rozwiązania nie uwzględnimy zjawiska samoindukcji. Zrobimy to dopiero w części drugiej, aby wyraźnie zaznaczyć, który człon otrzymanego wzoru na wartość końcowej prędkości rury stanowi poprawkę na samoindukcję.

Z prawa indukcji Faradaya wynika, że w przestrzeni, w której zmienia się pole magnetyczne, indukuje się wirowe pole elektryczne. W przypadku zanikającego pola magnetycznego o liniach zwróconych w dół (rys. 1), wektor $\frac{d\vec{B}}{dt}$ jest zwrócony w górę. Wynika z tego, że linie wirowego pola elektrycznego są zwrócone zgodnie ze wskazówkami zegara (widok z góry).

Zakładamy, że B zewnętrznego pola magnetycznego zmniejsza się liniowo:

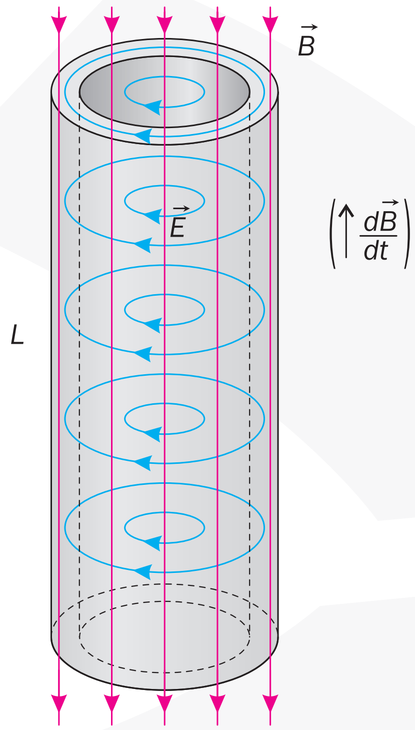
$$B=B_0-At \qquad \frac{dB}{dt}=-A$$

gdzie A jest stałą dodatnią; całkowity czas, w którym pole zmaleje do zera, będzie równy:

$$t_c=\frac{B_0}{A}$$

Korzystając z prawa Faradaya, obliczamy wartości natężenia pola elektrycznego na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni rury:

$$E_1\cdot 2\pi r_1=-S_1\cdot\frac{dB}{dt}$$



Rys. 1

Data utworzenia:
2011-06-15

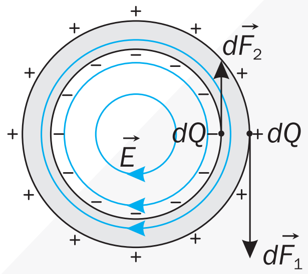
$$E_1 \cdot 2\pi r_1 = -\pi r_1^2 \cdot (-A) \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{A r_1}{2}$$

Podobnie

$$E_2 \cdot 2\pi r_2 = -S_2 \cdot \frac{dB}{dt}$$

$$E_2 \cdot 2\pi r_2 = -\pi r_2^2 \cdot (-A) \quad \Rightarrow \quad E_2 = \frac{A r_2}{2}$$

Pole elektryczne działa na ładunki rozmieszczone na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni rury. Na każdy element ładunku dQ działa siła styczna do powierzchni, przy czym $dF_2 < dF_1$, bo na okręgu o mniejszym promieniu wartość natężenia pola elektrycznego jest mniejsza (rys. 2).



Rys. 2

Całkowity moment siły elektrycznej działającej na zewnętrzną powierzchnię rury ma wartość:

$$M_1 = Q E_1 r_1 = \frac{Q r_1^2 A}{2}$$

i zwrot zgodny z $\vec{B}_0$, a na zewnętrzną powierzchnię rury ma wartość:

$$M_2 = Q E_2 r_2 = \frac{Q r_2^2 A}{2}$$

i zwrot przeciwny do $\vec{B}_0$. Moment siły wypadkowej $\vec{M}$ jest stały, ma wartość $M = M_1 - M_2$ i jest zwrócony zgodnie z $\vec{B}_0$.

Stosujemy drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego rury:

$$M_1 - M_2 = I\varepsilon$$

gdzie $\varepsilon = \text{const} = \dfrac{\omega - \omega_0}{t_c} = \dfrac{\omega}{t_c}$, bo $\omega_0 = 0$.

$$\frac{AQ}{2}(r_1^2 - r_2^2) = I\frac{\omega}{t_c}$$

© Copyright by ZamKor
P. Sagnowski i Wspólnicy sp. j.
ul. Tetmajera 19, 31-352 Kraków
tel. +48 12 623 25 00
faks +48 12 623 25 24
e-mail: zamkor@zamkor.pl
adres serwisu: www.zamkor.pl

skąd

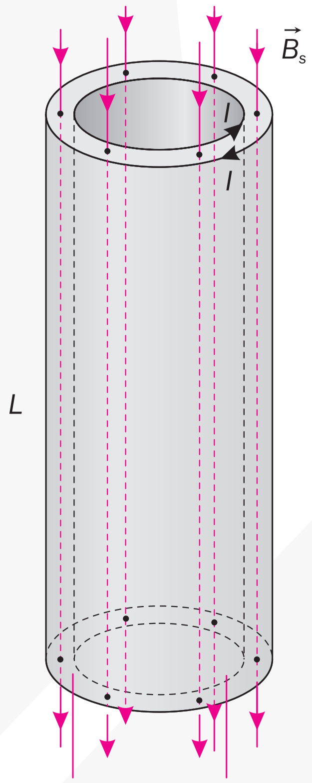
$$\omega = \frac{AQt_c}{2l}(r_1^2 - r_2^2)$$

$At_c = B_0$, więc

$$\omega = \frac{B_0 Q}{2l}(r_1^2 - r_2^2)$$

W chwili gdy zniknie pole magnetyczne, prędkość końcowa rury osiągnęłaby taką wartość, gdyby nie występowało zjawisko samoindukcji.

2. Uwzględnienie zjawiska samoindukcji stanowi znacznie trudniejszą część rozwiązania.



Rys. 3

Obracająca się coraz szybciej naelektryzowana rura stanowi prąd o zmieniającym się (rosnącym) natężeniu, który jest źródłem siły elektromotorycznej samoindukcji.

Powierzchnie rury możemy potraktować jako dwie współosiowe „zwojnice” z prądem o **jednakowym** natężeniu $I(t)$; kierunki tych prądów są przeciwne ze względu na przeciwne znaki ładunków na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni rury. W każdej „zwojnicy” powstaje jednorodne pole magnetyczne, którego indukcja ma wartość

$$B_s = \mu_0 \cdot \frac{I(t)}{L}$$

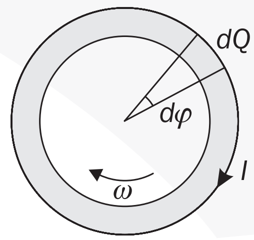
gdzie I pełni rolę sumy natężeń prądów I_1 w poszczególnych „zwojach”, tzn. $I = I_1 n$.

Wewnątrz rury pola magnetyczne wytworzone przez te prądy znoszą się, pole magnetyczne pozostaje tylko między ściankami i pochodzi od „zwojnicy” zewnętrznej, zatem $\vec{B}_s$ między ściankami jest zwrócone w dół, zgodnie z $\vec{B}_0$ (rys. 3).

Obliczamy $I(t)$:

Zachodzi proporcja: $\dfrac{dQ}{Q} = \dfrac{d\varphi}{2\pi}$, gdzie $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$ (rys. 4),

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\omega dt}{2\pi} \qquad I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q\omega}{2\pi}$$



Rys. 4

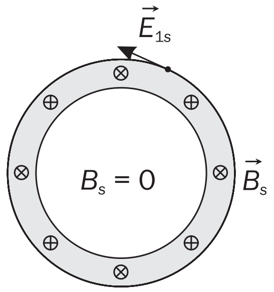
$$I(t) = \frac{Q}{2\pi} \cdot \omega(t)$$

zatem

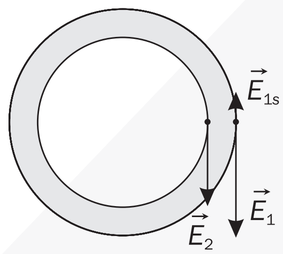
$$B_s(t) = \frac{\mu_0}{L} \cdot \frac{Q}{2\pi} \cdot \omega(t)$$

$$\frac{dB_s}{dt} = \frac{\mu_0 Q}{2\pi L} \cdot \varepsilon$$

Korzystając znowu z prawa indukcji Faradaya, obliczamy wartość natężenia pola elektrycznego E_s powstającego wzdłuż konturów leżących na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni rury. Wektor $\frac{d\vec{B}}{dt}$ jest zwrócony w dół, bo B_s rośnie, więc natężenie pola elektrycznego $\vec{E}_{1s}$ jest zwrócone przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (widok z góry – rys. 5).



Rys. 5



Rys. 6

$$-E_{1s}\cdot 2\pi r_1 = -S\cdot\frac{dB_s}{dt} \qquad \text{gdzie} \qquad S=\pi(r_1^2-r_2^2)$$

$$E_{1s}\cdot 2\pi r_1 = \pi(r_1^2-r_2^2)\frac{\mu_0 Q\varepsilon}{2\pi L}$$

$$E_{1s}=\frac{\mu_0 Q\varepsilon}{4\pi L}\cdot\frac{r_1^2-r_2^2}{r_1}$$

E_{2s} wzdłuż konturu leżącego na wewnętrznej powierzchni rury jest równe zeru, bo kontur ten nie obejmuje żadnego pola magnetycznego.

Tak więc poprzednio obliczona wartość E_1 zostaje zmniejszona o E_{1s}, a E_2 nie ulega zmianie (rys. 6). Po uwzględnieniu tego faktu, obliczenia będą następujące:

$$M = Qr_1(E_1-E_{1s})-Qr_2E_2$$

$$M = Q\,r_1\left(\frac{Ar_1}{2}-\frac{\mu_0 Q\varepsilon}{4\pi L}\cdot\frac{r_1^2-r_2^2}{r_1}\right)-Q\,r_2\,\frac{Ar_2}{2}$$

gdzie $A=\frac{B_0}{t_c}$, $\varepsilon=\frac{\omega}{t_c}$.

$$M=\frac{QAr_1^2}{2}-\frac{QAr_2^2}{2}-\frac{\mu_0 Q^2\varepsilon}{4\pi L}(r_1^2-r_2^2)$$

$$M=\frac{Q}{2t_c}(r_1^2-r_2^2)\left(B_0-\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi L}\right)$$

$$I\varepsilon = \frac{Q}{2t_c}(r_1^2 - r_2^2)\left(B_0 - \frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi L}\right)$$

Mnożymy obie strony wzoru przez t_c:

$$I\omega = \frac{Q}{2}(r_1^2 - r_2^2)B_0 - \frac{\mu_0 Q^2\omega}{4\pi L}(r_1^2 - r_2^2)$$

$$\omega\left(I + \frac{\mu_0 Q^2}{4\pi L}(r_1^2 - r_2^2)\right) = \frac{Q}{2}(r_1^2 - r_2^2)B_0$$

$$\omega = \frac{\frac{Q}{2}(r_1^2 - r_2^2)B_0}{I + \frac{\mu_0 Q^2 (r_1^2 - r_2^2)}{4\pi L}} \qquad \text{lub} \qquad \omega = \frac{Q(r_1^2 - r_2^2)B_0}{2I + \frac{\mu_0 Q^2 (r_1^2 - r_2^2)}{2\pi L}}$$

Porównując ten wynik z wynikiem otrzymanym w części 1. rozwiązania, widzimy, że drugi składnik sumy w mianowniku pojawił się wskutek uwzględniania zjawiska indukcji własnej.

Podstawiamy dane liczbowe:

$$\omega = \frac{6\cdot 0^{-5}\cdot 1\cdot[(0{,}01)^2 - (0{,}009)^2]}{2\cdot 6\cdot 10^{-9} + \frac{4\pi\cdot 0^{-7}(6\cdot 10^{-5})^2}{2\pi\cdot 0{,}5}[(0{,}01)^2 - (0{,}009)^2]}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\omega = \frac{114\cdot 10^{-11}}{12\cdot 0^{-9} + 2{,}7\cdot 10^{-20}}\,\frac{1}{\mathrm{s}} \qquad \omega \approx 0{,}095\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Poprawka uwzględniająca zjawisko samoindukcji ma wartość o dziesięć rzędów wielkości mniejszą od pierwszego składnika sumy w mianowniku. Nie wpływa ona na wartość liczbową szybkości kątowej rury.

Data utworzenia:
2011-06-15